

2. Construya un homomorfismo de grupos entre las siguientes parejas de grupos:

(a) $(\{1, -1\}, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación de números reales, y $(\mathbb{Z}_2, +_2)$.

(b) $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ y $(S_2, \circ)$.

(c) Discuta si los anteriores homomorfismos son isomorfismos.

a) $1 \cdot -1 = -1$ $1 \cdot 1 = 1$ $(-1) \cdot (-1) = 1$
 $1 +_2 0 = 1$ $1 +_2 1 = 0$ $0 +_2 0 = 0$

$f(1) = 0$ $f(1 \cdot (-1)) = f(1) +_2 f(-1)$; $f(-1) = 0 +_2 1$; $\boxed{1 = 1}$
 $f(-1) = 1$

b) $1 +_2 0 = 1$ $1 +_2 1 = 0$ $0 +_2 0 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$g(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $g(1 +_2 0) = g(1) \circ g(0)$; $g(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
 $g(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Sea $(G, *)$ un grupo. Dado $g \in G$, se considera el subconjunto

$$\langle g \rangle = \{x \in G : x = g^k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Demuestre que $\langle g \rangle$ es un subgrupo de G .

(b) Sea la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \langle g \rangle$ dada por $f(k) = g^k$. Demuestre que f es un homomorfismo de grupos entre $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\langle g \rangle, *)$.

(c) Si $G = \langle g \rangle$ para algún $g \in G$, se dice que G es un grupo *cíclico* y que g es *generador* del grupo. Si G es un grupo cíclico con una cantidad infinita de elementos, demuestre usando la aplicación del apartado (b) que G es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.

a) - Interna $\rightarrow x_1 = g^{k_1}$ $x_2 = g^{k_2}$ $x_1 * x_2 = g^{k_1} * g^{k_2}$; $x_1 * x_2 = g^{k_1+k_2}$ ✓
 - Asociativo $\rightarrow x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$; $g^{k_1} * g^{k_2+k_3} = g^{k_1+k_2} * g^{k_3}$; $g^{k_1+k_2+k_3} = g^{k_1+k_2+k_3}$ ✓
 - Neutro $\rightarrow x_1 * e = x_1$ $g^{k_1} * g^0 = g^{k_1}$; $g^{k_1+k_0} = g^{k_1}$; $k_1+k_0=k_1$ $k_0=0$ $e = g^0 = 1$ ✓
 - Inverso $\rightarrow x_1 * i = e$ $g^{k_1} * g^{k_i} = g^0$; $k_i = -k_1$ ✓

b) $f(k_1 + k_2) = f(k_1) * f(k_2)$; $g^{k_1+k_2} = g^{k_1} * g^{k_2}$; $g^{k_1+k_2} = g^{k_1+k_2}$

4. Se considera la estructura $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, donde $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, y $+$ y $\cdot$ son la suma y producto de funciones, respectivamente. Estudie si $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un cuerpo.

• $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +)$ es grupo abeliano:

- Interna $\rightarrow f(x) + g(x) = h(x) \quad \checkmark$ - Asociativa $\rightarrow (f+g)+h = f+(g+h) \quad \checkmark$

- Neutro $\rightarrow f(x) + e(x) = f(x); e(x) = 0 \quad \checkmark$ - Inverso $\rightarrow f(x) + i(x) = e(x); i(x) = -f(x) \quad \checkmark$

- Conmutativa $\rightarrow f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \quad \checkmark$

• es asociativo